ЛА - класна 15.10.12

Детерминанта, транспонирана детерминанта

Деф:
Всяко нарекране $i_1, i_2, \dots i_n$ на числата $1, 2 \dots n$ се нарича тяхна пермутация

Пример:
Пермутациите на 1 и 2 са 1;2 и 2;1

Пермутациите на 1, 2 и 3 са 1;2;3, 2;3;1, 3;1;2, 1;3;2, 2;1;3, 3;2;1

Пермутациите на числата от $1 \dots n$ са $n! = 1 \cdot 2 \dots n$ на брой

Наистина за $n=2$ имаме 2 пермутации на 1, 2
Ако пермутациите на $n-1$ числа са $(n-1)!$ на брой то в пермутация $i_1 i_2 \dots i_n$ на числата $1 \dots n$ имаме n възможности за i_1, при фиксирано i_1 числата $i_2 \dots i_n$ пробягват пермутациите на числата $\{1, n\} \setminus \{i_1\}$ или всяко фиксирано i_1 има $(n-1)!$ възможности за i_2 и $n \Rightarrow$ Пермутации на $1 \dots n$ са $(n-1)! = n!$ на брой. Числата i_p и i_q в пермутация $i_1 \dots i_p, i_q \dots i_n$ на $1, 2 \dots n$ образуват инверсия ако $p < q$ и $i_p > i_q$

Деф
Пермутацията $i_1, \dots i_n$ е четна (нечетна), ако броят на инверсиите е четен (нечетен)

Примери

Пермутацията 1,2 е четна а 2,1 - нечетна

четните пермутации на 1,2,3 са

1,2,3 ; 2,3,1 ; 3,2,1 - 2 инверсии

инверсии

а нечетните пермутации на 1,2,3 са

1,3,2 ; 2,1,3 ; ~~3,1,2~~ 3,2,1

Определение детерминанта

$\det A \quad A = (a_{ij})$ и $j = i \in M_{m,n}^F$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{[i_1 \dots i_n]} a_{1i_1}, a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

Където i_1 до i_n е броят на инверсиите в пермутацията $i_1 \dots i_n$ на числата $1 \dots n$ и сумирането е по всички пермутации $i_1 \dots i_n$ на $1 \dots n$

Примери

обща дефиниция

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{[1,2]} a_{11} a_{22} + (-1)^{[2,1]} a_{12} a_{22} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Правилото на Сарус за детерминанти

от 3-ти ред

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$+ / \ (-1)^{[1,2,3]} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{[2,3,1]} a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{[3,1,2]} a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- / \ (-1)^{[3,2,1]} a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^{[1,3,2]} a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{[2,1,3]} a_{12}a_{21}a_{33}$$

Само за det от $3^{-ти}$ ред

$$\begin{vmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & a_{2\,n-1} & \\ a_{n1} & \ddots & \end{vmatrix} = (-1)^{[n,n-1,\ldots 2,1]} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1} =$$

$$= (-1)^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1} a_{1n}, a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

Всяко κ 0 е 0

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & 0 \\ & \ddots & \\ \ddots & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Дефиниция

Разместната на 2 числа i_p и i_q в пермутацията $i_1 \ldots i_n$ се нарича транспозиция

Лема

Прилагането на транспозиция променя четността на пермутацията

Док.

1-ви частен случай

Ако разменяме съседни числа i_p и i_{p+1} в $(i_1, \dots i_p, i_{p+1}, i_{p+2} \dots i_n)$ то за произведението на $\forall q, s \in \{1, \dots n\} \setminus \{p, p+1\}$ имаме транспозиция от вида $i_q i_s, i_q i_p$, или $i_q i_{p+1}$ не се създават и не се унищожават

Ако $i_p > i_{p+1}$ транспозицията $(i_p; i_{p+1})$ премахва инверсията между i_p и i_{p+1} за $i_p < i_{p+1}$ се създава 1 инверсия

(*1)

за p — местене (i_p, i_{p+1}) // местене (i_p, i_{p+2}) — n местене (i_p, i_q) за q в обратен ред до i_{p+1} (i_q, i_{p+1}) т.е разместването

2 Случай

(i_p, i_q), $q > p$

Нека $i_1 \dots i_{p-1}, i_p, i_{p+1} \dots i_n$

Прилагаме предишното (от (*1)) на транспозиции на съседни числа, което се свежда до разместване на i_p с i_q

$\underbrace{(i_q, i_{p+1}) \dots (i_q\ i_{q-1})}$

Числата са $q-1-p$ броя

$\underbrace{(i_p\ i_q) \dots (i_p, i_{p+2}) \dots (i_p, i_{p+1})}$

Числата са $q-p$ броя

Транспозицията (i_p, i_q) е произведение на $2(q-p)-1$ транспозиции на съседни числа и променя четността на перумтацията

~~Следствие 1~~ Следствие 1

Прилагането на транспозиция задава изоморфизъм на множеството M_0 на четните перумтации на $1 \dots n$ с множеството M_1 на нечетните перумтации

$$M_0 \xrightarrow{(i,j)} M_1 \qquad 1 \le i \le j \le n$$

$(i_j)^2 = Id$ - идентитетът

Следствие 2

Броя на четните перумтации е равен на броя на нечетните перумтации

$$|M_0| = |M_1| = \frac{n!}{2} \text{ за всяко } n \ge 2$$

Лема

За произволни пермутации $j_1 - j_n$ и $k_1 - k_n$ на числата $1, 2 - n$, изразът $(-1)^{[j_1 - j_n] + [k_1 - k_n]}$ $a_{j_1 k_1}, a_{j_2 k_2} - a_{j_i k_i}$ е събираемо в детерминантата на матрицата

$$\det (a_{ij})_{i,j=1}^{n} = 1$$

Док.

За произвольни $1 \leq p \leq q \leq n$ прилагането на транспозицията $(j_p j_q)$ към $j_1 - j_n$ и транспозицията $(k_p k_q)$ към $k_1, k_2 - k_n$ не променят a_{j_k}, защото четността на $[j_1 - j_n] + [k_1 - k_n]$ се запазва и произведението $a_{j_p k_p} - a_{j_q k_q}$ не зависи от реда на множителите

Чрез прилагането на транспозиция свеждаме $j_1 - j_n$ към пермутация $1, 2 - n$

Ако прилагането на същите транспозиции превежда до пермутация към $i_1 - i_n$, то

$$d_{jk} = d_{1,2 \ldots n, i_1 - i_n} = (-1)^{[1,2 \ldots n] + [i_1 - i_n]} a_{1 i_1}, a_{2 i_2} - a_{n i_n} =$$

$$(-1)^{[i_1 - i_n]} a_{1 i_1}, - a_{n i_n} \text{ е събираемо в } \det (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$$

Деф

Ако в матрица A с елементи $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \; i \in M_{m,n}^{(F)}$ разменим редовете и стълбовете, получаваме транспонирана матрица A^t т.е

Ако $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ то

$$A^t = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{i1} & & a_{m1} \\ a_{12} & a_{i2} & & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{in} & & a_{mn} \end{array}\right) \in M_{n\times m}^{(F)}$$

Тв

За всяка квадратна матрица е в сила

$$\det(A^t) = \det(A)$$

$$\det(A^t) \overset{\det}{=} \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{[i_1 \dots i_n]} (A^t)_{1i_1} (A^t)_{2i_2} \dots (A^t)_{ni_n} = \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{[i_1 \dots i_n]} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}$$

Съгласно лемата

$$(-1)^{[i_1 \dots i_n]} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} = (-1)^{[i_1 \dots i_n] + [1, 2, \dots n]} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}$$ е

съвпадено на $\det(a_{ij})^n$

Понеже $\det(A^t)$ и $\det A$ имат еднакъв брой събираеми $n! \Rightarrow \det(A^t) = \det(A)$

Основни свойства на детерминантата

Нека $A = \begin{pmatrix} — & a_1 & — \\ — & a_i & — \\ — & a_n & — \end{pmatrix} \in M_{n\times n}^{(F)}$ се състои от редове $a_i = (a_{i1}, a_{i2} \dots a_{in}) \in M_{1\times n}^{(F)}$ за $1 \le i \le n$

Q

Свойство 1

$$\det_p \begin{pmatrix} a_i \\ a'_p + a''_p \end{pmatrix} = \det_p \begin{pmatrix} a_i \\ a'_p \end{pmatrix} + \det_p \begin{pmatrix} a_i \\ a''_p \end{pmatrix}$$

$$a'_p, a''_p \in M^{(F)}_{1 \times n}$$

$$a'_p + a''_p = (a'_{p1}, a'_{p2} \dots a'_{pn}) + (a''_{p1}, a''_{p2} \dots a''_{pn}) =$$

$$(a'_{p1} + a''_{p1} \dots a'_{pn} + a''_{pn}) \in M^{(F)}_{n \times n}$$

$$\sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{[i_1 \dots i_n]} a_{1i_1} \dots a_{p-1\,i_{p-1}}, a_{pi_p} \dots a_{ni_n} \overset{\text{def}}{=} \det_p \begin{pmatrix} a_i \\ a'_p \end{pmatrix} + \det_p \begin{pmatrix} a_i \\ a''_p \end{pmatrix}$$

Свойство 2

$$\det_p \begin{pmatrix} a_i \\ \lambda a_p \end{pmatrix} = \lambda \det_p \begin{pmatrix} a_i \\ a_p \end{pmatrix} \qquad \lambda \in F$$

умножение на число (само за 1 рер)!!!

Док-во

$$\det_p \begin{pmatrix} a_i \\ \lambda a_p \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \sum (-1)^{[i_1 \dots i_n]} a_{1i_1} \dots a_{p-1\,i_{p-1}} (\lambda a_{pi_p}) a_{p+1\,i_{p+1}} \dots a_{ni_n}$$

$$= \lambda \left(\sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{[i_1 \dots i_n]} a_{1i_1} \dots a_{pi_p} \dots a_{ni_n} \right) = \lambda \det_p \begin{pmatrix} a_i \\ a_p \end{pmatrix}$$

Свойство 3

$$\det_q^p \begin{pmatrix} a_p \\ \lambda a_p \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda a_p = (\lambda a_{p_1} + \lambda a_{p_2} + \dots \lambda a_{p_n})$$

$$\det \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \begin{pmatrix} a_p \\ \lambda a_p \end{pmatrix} \overset{св2}{=} \lambda \det \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \begin{pmatrix} a_p \\ a_p \end{pmatrix}$$

Достатъчно е да покажем че $\det \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \begin{pmatrix} a_p \\ a_p \end{pmatrix} = 0$

В $\det \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \begin{pmatrix} a_p \\ a_p \end{pmatrix} \overset{\det}{=} \sum_{(i_1 - i_n)} (-1)^{[i_1 - i_n]} a_{1i_1}, a_{2i_2} \dots a_{pi_p} \dots a_{pi_q} \dots a_{ni_n}$

Събираемите $(-1)^{[i_1 - i_n]} a_{1i_1} \dots a_{pi_q} \dots a_{ni_n}$ от получеността след транспозиция $(i_p; i_q)$ събираемо $(-1)^{[i_1 - i_n]} a_{1i_1} \dots a_{pi_q} \dots a_{ni_n}$ с които ще се унищожават

Свойство 4

$$\det \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \begin{pmatrix} a_p \\ a_q + \lambda a_p \end{pmatrix} = \det \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \begin{pmatrix} a_p \\ a_q \end{pmatrix}$$

Доказателство

$$\det \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \begin{pmatrix} a_p \\ a_q + \lambda a_p \end{pmatrix} \overset{св1}{=} \det \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \begin{pmatrix} a_p \\ a_q \end{pmatrix} + \underbrace{\det \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \begin{pmatrix} a_p \\ \lambda a_p \end{pmatrix}}_{=0} \overset{св3}{=} \det \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \begin{pmatrix} a_p \\ a_q \end{pmatrix}$$

Свойство 5

$$\det_p \left(\sum_{q \neq p} \lambda_q a_q \right) = 0 \overset{св3}{\Longrightarrow} \sum_{q \neq p} 0 = 0$$

Свойство 6

$$\det \begin{matrix} p \\ q \end{pmatrix} a_q \\ a_p \end{pmatrix} = -\det \begin{matrix} p \\ q \end{pmatrix} a_p \\ a_q \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{св 4}} \begin{matrix} p \\ q \end{pmatrix} a_q \\ a_p + a_q \end{pmatrix} \xleftarrow{(-1)} \xrightarrow{\text{св 4}}$$

$1 \le p \le q \le n$

$$\xrightarrow{\text{св 4}} \det \begin{matrix} p \\ q \end{pmatrix} -a_p \\ a_p + a_q \end{pmatrix} \xleftarrow{(1)} \xrightarrow{\text{св 4}} -\det \begin{matrix} p \\ q \end{pmatrix} a_p \\ a_q \end{pmatrix}$$

Аналогични свойства на детерминанта са в сила относно съответните $b_1 \dots b_n$ на матрица A с

$$A = (b_1 \dots b_n) \in M_{n \times n}^{(F)}$$

Адюнгирани (присъединени) количества и подетерминанти

Дефиниция

Сбора от елементите на $\det(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ отделим събираемите кратни a_{pq} за някои фиксирани $1 \le p \le q \le n$ и изнесем пред скоби a_{pq}, то полученото в скобите се нарича адюнгирано количество на $a_{p,q}$ и се бележи с A_{pq}

По-точно

$$A_{p,q} = (-1)^{[i_1 \dots i_{p-1}, q, i_{p+1}, \dots i_n]} a_{1 i_1} \dots a_{p-1\, i_{p-1}} a_{p+1\, i_{p+1}} \dots a_{n i_n}$$

$(i_1 \dots i_{p-1}, q, i_{p+1} \dots i_n)$ има $(n-1)$ събираеми

Тв 1

Разлагане на det по адюнгирани количества относно ред

$$\det(A) = \sum_{s=1}^{n} a_{ps} A_{ps}$$

Тв 2 Разлагане на det — и — относно стълб

$$\det(A) = \sum_{s=1}^{n} a_{sq} A_{sq}$$

Док Тв 1

$$\det(A) = \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{[i_1 \dots i_n]} a_{1i_1} \dots a_{ni_n}$$

Всяко събираемо на $\det(A)$ е събираемо на произв. $a_{pi_p} A_{pi_p}$ и от там

$$(-1)^{[i_1 \dots i_p \dots i_n]} a_{1i_1} \dots a_{pi_p} \dots a_{ni_n}$$

събираемо на $\sum_{s=1}^{n} a_{ps} A_{ps}$

$\det(A)$ и $\sum_{s=1}^{n} a_{ps} A_{ps}$ имат един и същи брой

събираеми $n!$ и съвпадат

Доказ (т.6.2)

Всяко събираемо на

$$\det(A) = \det(A^t) = \sum_{(i_1 \sim i_n)} (-1)^{[i_1 - i_q - i_n]} a_{i i_1} - a_{q i_q} - a_{i_n n}$$

участва в a_{iq}, с A_{iqq} така че е събираемо в

$\sum_{s=1}^{n} a_{sq} A_{sq}$. Понеже $\det(A) = \det(A^t)$ и

$\sum_{s=1}^{n} a_{sq} A_{sq}$ имат един и същи брой събираеми

$n!$ те съвпадат